JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **10**, 151–158 (1974)

Über die Interpolationsaufgabe bei natürlichen Polynom-Splines mit äquidistanten Knoten

GERHARD MERZ

Institut für Angewandte Mathematik I der Universität, 852 Erlangen, Germany

Communicated by G. Meinardus

1. EINLEITUNG

Gegeben seien $n + 1$ reelle Zahlen

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n . \tag{1}$$

Unter einem natürlichen Polynom-Spline vom Grad $2k + 1$ versteht man eine über dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktion $s(x)$, die folgenden Bedingungen genügt:

(i) In jedem Intervall (x_i, x_{i+1}), $i = 0(1)n - 1$, stimmt $s(x)$ mit einem Polynom $p_i(x)$ höchstens $(2k + 1)$-ten Grades überein;

(ii) für $x < x_0$ bzw. $x > x_n$ stimmt $s(x)$ jeweils mit einem Polynom höchstens k-ten Grades überein;

(iii) $s(x)$ besitzt über $(-\infty, +\infty)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung $2k$.

Die Klasse der natürlichen Polynom-Splines vom Grad $2k + 1$ mit den Knoten (1) bezeichnen wir mit $S_{2k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Die Aufgabe, zu vorgegebenen Wertepaaren (x_i, y_i), $i = 0(1)n$, eine Funktion $s(x) \in S_{2k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ zu konstruieren, die die Interpolationsbedingungen

$$s(x_i) = y_i , \qquad i = 0(1)n, \tag{2}$$

erfüllt, ist für $1 \leqslant k \leqslant n$ eindeutig lösbar [1, S. 165]. Zur Konstruktion der Interpolationssplines sind i.a. k lineare Gleichungssysteme der Ordnung $n - 1$ zu lösen [1, S. 109 ff.]. Wir zeigen, daß in dem auch für die Anwendungen wichtigen Fall äquidistanter Knoten der Rechenaufwand erheblich verringert werden kann: Unter Verwendung erzeugender Funktionen ist bei beliebiger Knotenzahl nur *ein* lineares Gleichungssystem der Ordnung k

aufzulösen, während sich die übrigen Größen aus einer linearen Rekursion ergeben. Ein entsprechendes Verfahren für den Fall $k = 1$ hat Greville [3] angegeben.

2. Erzeugende Funktionen

Wir gehen aus von den für $m = 0, 1, 2,\ldots$ mit einer Variablen t, $|t| < 1$, definierten Funktionen

$$\theta_m(t) = \sum_{\rho=0}^{\infty} (1 + \rho)^m t^\rho. \tag{3}$$

Sie sind alle rational, denn zunächst ist

$$\theta_0(t) = 1/(1 - t)$$

und ferner gilt für $m = 0, 1, 2,\ldots$

$$\theta_{m+1}(t) = (d/dt)(t\theta_m(t)). \tag{4}$$

Nun setzen wir

$$\theta_m(t) = q_m(t)/(1 - t)^{m+1}$$

und zeigen, daß $q_m(t)$ ein Polynom in t ist. Aus (4) folgt nämlich für $m = 0, 1, 2,\ldots$ die Rekursionsformel

$$q_{m+1}(t) = t(1 - t)\, q_m'(t) + (1 + mt)\, q_m(t). \tag{5}$$

Zum Beweis der Behauptung ist jetzt nur noch $q_0(t) = 1$ zu beachten. Aus (5) ergibt sich für $m = 1, 2,\ldots$ noch

$$\text{Grad } q_m(t) = m - 1.$$

Für die ersten Polynome $q_m(t)$ erhält man

$$\begin{aligned}
q_0(t) &= 1\\
q_1(t) &= 1\\
q_2(t) &= 1 + t\\
q_3(t) &= 1 + 4t + t^2\\
q_4(t) &= 1 + 11t + 11t^2 + t^3\\
q_5(t) &= 1 + 26t + 66t^2 + 26t^3 + t^4.
\end{aligned}$$

Alle Polynome $q_m(t)$ besitzen für $m \geqslant 1$ die Symmetrieeigenschaft

$$t^{m-1} q_m(1/t) = q_m(t).$$

Dies kann etwa aus (5) abgeleitet werden.

Mit den Funktionen $\theta_m(t)$ bilden wir jetzt die beiden Matrizen

$$A = (\theta_\mu(t)\, \theta_\nu(t)/\theta_{2k+1}(t)), \qquad \mu, \nu = 1(1)k,$$

sowie für $n \geqslant k$

$$B_{k,n} = \left(\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{\theta_\mu(t)\, \theta_\nu(t)}{\theta_{2k+1}(t)}\right)_{t=0}, \qquad \mu, \nu = 1(1)\, k.$$

A ist für $k \geqslant 2$ singulär. Aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Interpolationsproblems (2) werden wir später schließen, daß $B_{k,n}$ für $n \geqslant k$ nicht singulär ist. Im Fall $k = 1$ kann dies auch direkt gezeigt werden. Hier gilt

$$B_{1,n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{\theta_1^2(t)}{\theta_3(t)}_{t=0} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{1 + 4t + t^2_{t=0}}.$$

Mit $\omega = 3^{1/2} - 2$ wird

$$\frac{1}{1 + 4t + t^2} = \frac{1}{2(3)^{1/2}} \left(\frac{\omega}{1 - \omega t} - \frac{\omega^{-1}}{1 - \omega^{-1} t}\right)$$
$$= \frac{1}{2(3)^{1/2}} \sum_{\rho=0}^{\infty} (\omega^{\rho+1} - \omega^{-\rho-1})\, t^\rho,$$

woraus für $n \geqslant 1$

$$B_{1,n} = (1/2(3)^{1/2}) \qquad (\omega^n - \omega^{-n}) \neq 0$$

folgt.

Die Elemente der Matrix $B_{k_1 n}$ lassen sich auf einfache Weise rekursiv berechnen. Wir verwenden hierzu die in einer Umgebung des Nullpunkts konvergente Potenzreihe

$$\frac{\theta_\mu(t)\, \theta_\nu(t)}{\theta_{2k+1}(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma_\rho t^\rho. \tag{6}$$

Mit den Polynomen $q_m(t)$ folgt aus (6)

$$(1 - t)^{2k-\mu-\nu}\, q_\mu(t)\, q_\nu(t) = q_{2k+1}(t) \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma_\rho t^\rho. \tag{7}$$

Mit

$$q_{2k+1}(t) = \sum_{\rho=0}^{2k} \beta_\rho t^\rho$$

wird

$$q_{2k+1}(t) \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma_\rho t^\rho = \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda \sum_{\rho=0}^{\min(\lambda,2k)} \beta_\rho \gamma_{\lambda-\rho}$$

und damit folgt für $\lambda \geqslant 2k$ unter Beachtung von $\beta_0 = \beta_{2k} = 1$

$$\gamma_\lambda + \beta_1 \gamma_{\lambda-1} + \beta_2 \gamma_{\lambda-2} + \cdots + \gamma_{\lambda-2k} = 0, \tag{8}$$

während sich für $\lambda < 2k$ die Werte von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2k-1}$ direkt durch Koeffizientenvergleich in (7) ergeben.

Der Anfang einer Tabelle der Produkte $q_\mu(t)\, q_\nu(t)$ sieht folgendermaßen aus:

$\nu \backslash \mu$	1	2	3	4
1	1	$1+t$	$1+4t+t^2$	$1+11t+11t^2+t^3$
2		$1+2t+t^2$	$1+5t+5t^2+t^3$	$1+12t+22t^2+12t^3+t^4$
3			$1+8t+18t^2+8t^3+t^4$	$1+15t+56t^2+56t^3+15t^4+t^5$
4				$1+22t+143t^2+244t^3+143t^4+22t^5+t^6$

Wir benötigen später auch die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der Funktionen

$$\theta_\mu(t)/\theta_{2k+1}(t), \qquad \mu = 1(1)k,$$

um $t = 0$, die ebenfalls einer Rekursionsformel der Form (8) genügen; allerdings muß hier $\lambda \geqslant 2k+1$ vorausgesetzt werden.

3. Berechnung der interpolierenden Spline-Funktion

Wir setzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß die Knoten in (1) durch $x_i = i$, $i = 0(1)n$, gegeben sind. Dann besitzt die eindeutig bestimmte interpolierende natürliche Spline-Funktion die Darstellung [2, S. 58]

$$s(x) = y_0 + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x^\nu + \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho (x - \rho)_+^{2k+1} \tag{9}$$

mit

$$x_+^{2k+1} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqslant 0 \\ x^{2k+1} & \text{für} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Da $s(x)$ für $x \geqslant n$ ein Polynom höchstens k-ten Grades ist, folgt das Bestehen der $k + 1$ Gleichungen

$$\sum_{\rho=0}^{n} s_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \rho s_\rho = \cdots = \sum_{\rho=1}^{n} \rho^k s_\rho = 0. \tag{10}$$

Die Zahlen s_ρ lassen sich rekursiv aus den α_ν berechnen. Wegen der Interpolationsbedingung (2) folgt nämlich aus (9) zunächst für $x = 1$

$$s_0 = y_1 - y_0 - \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \tag{11}$$

und weiter für $x = m + 1$, $m = 1(1)n - 1$,

$$s_m = y_{m+1} - y_0 - \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu (m + 1)^\nu - \sum_{\rho=0}^{m-1} s_\rho (m + 1 - \rho)^{2k+1}. \tag{12}$$

s_n ermittelt man schließlich aus einer der Gleichungen (10). Zur Berechnung der α_ν, $\nu = 1(1)k$, verwenden wir die unter 2. eingeführten erzeugenden Funktionen. Mit der Variablen t, $|t| < 1$, sei

$$\sigma(t) = \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho t^\rho$$

und

$$\eta(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} [s(\lambda + 1) - s(0)]\, t^\lambda.$$

Mit (9) folgt dann wegen

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho (\lambda + 1 - \rho)_+^{2k+1}\, t^\lambda = \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda + 1 - \rho)_+^{2k+1}\, t^\lambda$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho t^\rho \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\kappa + 1)^{2k+1}\, t^\kappa = \sigma(t)\, \theta_{2k+1}(t)$$

die für $|t| < 1$ gültige Identität

$$\eta(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \theta_\nu(t) + \sigma(t)\, \theta_{2k+1}(t),$$

d.h. wir erhalten für $\mu = 1(1)k$

$$\eta(t)\, \frac{\theta_\mu(t)}{\theta_{2k+1}(t)} = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu\, \frac{\theta_\mu(t)\, \theta_\nu(t)}{\theta_{2k+1}(t)} + \sigma(t)\, \theta_\mu(t). \tag{13}$$

Nun ist

$$\sigma(t)\, \theta_\mu(t) = \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho t^\rho \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda + 1)^\mu t^\lambda$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} t^\kappa \sum_{\rho=0}^{n} s_\rho (\kappa + 1 - \rho)_+^\mu$$

und der Koeffizient von t^{n-1} in dieser Potenzreihenentwicklung verschwindet wegen (10) für $\mu = 1(1)k$. Damit können wir für $\mu = 1(1)k$ in (13) einen Koeffizientenvergleich bei t^{n-1} durchführen und erhalten für die Zahlen α_ν, $\nu = 1(1)k$, ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix $B_{k,n}$ und bekannter rechter Seite. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe kann $B_{k,n}$ nicht singulär sein.

4. Spezialfall $k = 2$ (Quintic Splines)

Zur Illustration soll der Fall $k = 2$ ausführlich diskutiert werden. Wir benötigen hier die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen

$$\frac{\theta_1(t)}{\theta_5(t)},\ \frac{\theta_2(t)}{\theta_5(t)},\ \frac{\theta_1^2(t)}{\theta_5(t)},\ \frac{\theta_1(t)\, \theta_2(t)}{\theta_5(t)},\ \frac{\theta_2^2(t)}{\theta_5(t)}.$$

Es ist

$$\frac{\theta_1(t)}{\theta_5(t)} = \frac{(1-t)^4}{q_5(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho t^\rho = 1 - 30t + 720t^2 - 16770t^3 + 389280t^4 \ldots,$$

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_5(t)} = \frac{(1+t)(1-t)^3}{q_5(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} b_\rho t^\rho = 1 - 28t + 662t^2 - 15388t^3 + 357122t^4 \ldots,$$

$$\frac{\theta_1^2(t)}{\theta_5(t)} = \frac{(1-t)^2}{q_5(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} c_\rho t^\rho = 1 - 28t + 663t^2 - 15416t^3 + 357785t^4 \ldots,$$

$$\frac{\theta_1(t)\,\theta_2(t)}{\theta_5(t)} = \frac{1-t^2}{q_5(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} d_\rho t^\rho = 1 - 26t + 609t^2 - 14144t^3 + 328225t^4 \ldots,$$

$$\frac{\theta_2^2(t)}{\theta_5(t)} = \frac{(1+t)^2}{q_5(t)} = \sum_{\rho=0}^{\infty} e_\rho t^\rho = 1 - 24t + 559t^2 - 12976t^3 + 301105t^4 \ldots .$$

Die Koeffizienten a_ρ genügen für $\rho \geqslant 5$ der Rekursionsformel (vgl. (8))

$$a_\rho + 26a_{\rho-1} + 66a_{\rho-2} + 26a_{\rho-3} + a_{\rho-4} = 0$$

mit den Anfangswerten

$$a_1 = -30, \qquad a_2 = 720, \qquad a_3 = -16770, \qquad a_4 = 389280.$$

Dieselbe Rekursionsformel erfüllen die b_ρ für $\rho \geqslant 5$. Die Anfangswerte lauten jetzt

$$b_1 = -28, \qquad b_2 = 662, \qquad b_3 = -15388, \qquad b_4 = 357122.$$

Für die c_ρ, d_ρ und e_ρ ist die gleiche Rekursionsformel schon für $\rho \geqslant 4$ erfüllt. Die Anfangswerte sind

$$\begin{array}{llll} c_0 = 1, & c_1 = -28, & c_2 = 663, & c_3 = -15416 \\ d_0 = 1, & d_1 = -26, & d_2 = 609, & d_3 = -14144 \\ e_0 = 1, & e_1 = -24, & e_2 = 559, & e_3 = -12976. \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem für α_1 und α_2 lautet

$$\begin{aligned} c_{n-1}\alpha_1 + d_{n-1}\alpha_2 &= \sum_{\rho=0}^{n-1} a_\rho(y_{n-\rho} - y_0) \\ d_{n-1}\alpha_1 + e_{n-1}\alpha_2 &= \sum_{\rho=0}^{n-1} b_\rho(y_{n-\rho} - y_0). \end{aligned} \tag{14}$$

5. Beispiel

Sei $k = 2$, $n = 3$ und $y_0 = 3$, $y_1 = -1$, $y_2 = 7$, $y_3 = 4$. Dann wird

$$\sum_{\rho=0}^{2} a_\rho(y_{n-\rho} - y_0) = -2999$$

$$\sum_{\rho=0}^{2} b_\rho(y_{n-\rho} - y_0) = -2759$$

und wir erhalten aus (14) die Gleichungen

$$663\alpha_1 + 609\alpha_2 = -2999$$

$$609\alpha_1 + 559\alpha_2 = -2759.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_1 = -1895/132, \qquad \alpha_2 = 471/44$$

und mit (10), (11), (12) folgt aus (9)

$$s(x) = 3 - \frac{1895}{132}x + \frac{471}{44}x^2 - \frac{23}{66}x_+{}^5 + \frac{23}{22}(x-1)_+^5$$

$$- \frac{23}{22}(x-2)_+^5 + \frac{23}{66}(x-3)_+^5 .$$

6. Bemerkungen

(i) Daß $B_{k,n}$ nicht singulär ist, kann in jedem Spezialfall direkt bestätigt werden. Man erhält damit jeweils gleichzeitig einen *konstruktiven* Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für das gestellte Problem. Für den Fall $k = 2$ sei hier auf [4] verwiesen.

(ii) Für $k = 1$ kann die angegebene Methode zur Berechnung der Norm des Interpolationsoperators verwendet werden. Bei besserer Beherrschung der Matrix $B_{k,n}$ wäre dies auch im Fall $k \geqslant 2$ möglich. Offenbar spielen die Nullstellen des Polynoms $q_5(t)$ hier eine entscheidende Rolle.

(iii) Eine ähnliche Methode kann für periodische Splines entwickelt werden. An die Stelle von (10) treten dann Summen über n-te Einheitswurzeln.

Literatur

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilsson, and J. L. Walsh, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, New York, 1967.
2. T. N. E. Greville, Numerical procedures for interpolation by spline functions, *SIAM J. Numer. Anal.* **1** (1964), 53–68.
3. T. N. E. Greville, Table for third-degree spline interpolation with equally spaced arguments, *Math. Comput.* **24** (1970), 179–183.
4. G. Merz, Über die Berechnung von natürlichen interpolierenden Polynom-Splines fünften Grades mit äquidistanten Knoten, Bericht 004 aus dem Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen, Oktober 1971.